* مبرهنة: لتكن لدينا (E, ≤, ∨, ∧) شبكة توزيعية وتحتوي على العنصرين 0, 1 وكان للعنصر x فيها متمم x' فإنه يكون المتمم وحيد.

البرهان:

- نفرض جدلاً أن للعنصر x متممين x_1 ، x_2
- عندها إن $x \wedge x_1 = 0$ و $x \vee x_1 = 1$ ، $x \wedge x_1 = x \wedge x_2$
أيضاً $x \wedge x_2 = 0$ و $x \vee x_2 = 1$ ، $x \vee x_1 = x \vee x_2$
- وبما أن الشبكة توزيعية وحسب مبرهنة سابقة ينتج أن $x_1 = x_2$

* مبرهنة [2] «هامة»:

إذا كانت (E, ≤, ∨, ∧) شبكة توزيعية تحتوي العنصرين 0, 1 وكان للعنصرين x, y متممات في هذه الشبكة مثل x', y' على الترتيب عندئذ تتحقق المساواتان التاليتان:

1) $(x \wedge y)' = x' \vee y'$

2) $(x \vee y)' = x' \wedge y'$

«قانونا دي مورغان»

الإثبات

1) لدينا

$(x' \vee y') \vee (x \wedge y) = [(x' \vee y') \vee x] \wedge [(x' \vee y') \vee y]$

$= ((x' \vee x) \vee y') \wedge (x' \vee (y' \vee y)) = (1 \vee y') \wedge (x' \vee 1)$

$= 1 \wedge 1 = 1$

لأن الشبكة توزيعية

$(x \wedge y) \wedge (x' \vee y') = [(x \wedge y) \wedge x'] \vee [(x \wedge y) \wedge y']$

$(0 \wedge y) \vee (0 \wedge x) = 0 \vee 0 = 0$

نستنتج أن متمم العنصر $(x\wedge y)$ هو $x'\vee y'$

القانون الأول صحيح $(x\wedge y)' = x'\vee y'$

2) وبنفس الطريقة نثبت أن $(x\vee y)' = x'\wedge y'$

* مبرهنة: إن كانت $(E, \leq, \vee, \wedge)$ شبكة توزيعية وتحتوي العنصرين 0,1 عندئذٍ فإن العناصر التي لها متممات في E تشكل شبكة جزئية من E متممة.

البرهان:

لنفرض M مجموعة جزئية من E تحوي جميع العناصر التي لها متممات

أي أن: $x \in M \Leftrightarrow x' \in M$

إن العنصرين 0,1 هما عنصران من M وذلك لأن كل عنصر يقابله متمم (حيث متمم 0 هو 1 ، ومتمم 1 هو 0)

إن كان $x, y \in M$ فحسب مبرهنة سابقة

$(x\wedge y)' = x'\vee y' \Rightarrow x\wedge y \in M ، x\vee y \in M$

هذا يعني أن M شبكة جزئية من E

* مثال: لتكن لدينا الشبكة الممثلة بمخطط هاس

1, s, t, b, a, c, 0

إن هذه الشبكة غير توزيعية لأن

حسب التعريف $t\wedge(b\vee c) = t$

$(t\wedge b)\vee(t\vee c) = c$ ≠

أو حسب المبرهنة

$(b\vee c) = 1 = b\vee t$

$b\wedge c = 0 = b\wedge t$ ⇐ $c \neq t$

إن المجموعة M هي مجموعة العناصر التي تملك متممات في هذه الشبكة.

$M = \{0, 1, b, c, t, s\}$

لا تشكل شبكة جزئية $(s\wedge t = a \notin M)$

الشبكات البوليانية "شبكة بول" :

تسمى أي شبكة $(E,\leq,V,\Lambda)$ تحتوي 1 ، 0 توزيعية ومتممة شبكة بول . أو شبكة بوليانية . "أي شبكة فيها لكل عنصر متمم وحيد"

*مثال : $(P(E),\leq,V,\Lambda)$ هي شبكة بوليانية

$D(32)$ ، $D(42)$ هي شبكات بوليانية

$D(12)$ هي ليست بوليانية

ملاحظة : إن كل شبكة بوليانية يجب أن تتوافق فيها الشروط الآتية

1) يوجد فيها العنصرين 1 ، 0

2) لكل عنصر من $x \in E$ يوجد متمم وحيد

• وإذا كان $y \in E$ بحيث يكون $x \Lambda y = 0$ فإن $y \leq x'$

وذلك لأن :

$y = y\Lambda 1 = y\Lambda(x V x') = (y\Lambda x) V (y\Lambda x')$

$= 0 \; V (y\Lambda x') = y\Lambda x'$

$\Rightarrow y \leq x'$

3) $1' = 0$ ، $0' = 1$; $\forall x \in E$; $(x')' = x$

4) عناصر الشبكة البوليانية تحقق قانونين دي مورغان :

$(x\Lambda y)' = x' V y'$

$(x V y)' = x' \Lambda y'$

للشبكات البوليانية أهمية كبيرة لصلتها الوثيقة بحلقات بول وجبر بول الذي سندرسه بتفصيل أكثر في الفصل القادم.

الهومومورفيزم والإيزومورفيزم الشبكيات:

تعريف الهومومورفيزم الشبكي:

- نقول عن الدالة $f:(M,\le,\vee,\wedge) \to (N,\le,\vee,\wedge)$
أنها هومومورفيزم شبكي إن حققت الشرطان:

1) $f(x \wedge y) = f(x) \wedge f(y)$

2) $f(x \vee y) = f(x) \vee f(y)$ $\quad \forall x, y \in M$

تعريف الإيزومورفيزم الشبكي:

- ونقول أن f إيزومورفيزم شبكي ترتيبي إذا كان بالإضافة لكونه هومورفيزم أيضاً متباين وغامر.

الهومورفيزم الشبكي العاكس للترتيب:

- ويعرف الهومورفيزم الشبكي العاكس للترتيب إن حقق الشرطان:

1) $f(x \wedge y) = f(x) \vee f(y)$

2) $f(x \vee y) = f(x) \wedge f(y)$

- وإذا كان بالإضافة لذلك متبايناً وغامراً فنسميه إيزومورفيزم شبكي عاكس للترتيب.

إذا كان الشبكتين متساويتان نسميه أوتومورفيزم

1- إذا كان f شبكي ترتيبي فإن f هو هومومورفيزم ترتيبي

الإثبات:

$x \le y \Rightarrow y = x \vee y \Rightarrow$
$f(y) = f(x \vee y) = f(x) \vee f(y)$

هومورفيزم شبكي ترتيبي

$\Rightarrow f(x) \le f(y)$

مثال

2- إذا كان f شبكي عاكس للترتيب فإن f هو عاكس للترتيب

$x \le y \Rightarrow x = x \vee y \Rightarrow f(y) = f(x) \wedge f(y)$

$\Rightarrow f(x) \ge f(y)$

* مبرهنة: اذا كان f تقابلاً من الشبكة $(M,\le)$ الى $(N,\le)$ عندئذ فان:

1- ان f هو ايزومورفيزم شبكي ترتيبي اذا وفقط اذا كان f ترتيبي

2- ان f ايزومورفيزم شبكي عاكس للترتيب اذا وفقط اذا كان f ايزومورفيزم عاكس للترتيب

الاثبات:

1- لزوم الشرط:

- وجدنا سابقاً ان كل مورفيزم شبكي ترتيبي هو مورفيزم ترتيبي
- وبما ان f تقابل يكفي ان نثبت ان f^{-1} هو مورفيزم ترتيبي للمجموعة المرتبة جزئياً $(N,\le)$ في $(M,\le)$
- ليكن $n_1 \le n_2$ ولنفرض $m_1 = f^{-1}(n_1)$, $m_2 = f^{-1}(n_2)$

فيكون:

$$f(m_1 \vee m_2) \overset{f\ \text{مورفيزم}}{=} f(m_1) \vee f(m_2) = n_1 \vee n_2 = n_2$$

ومنه:

$$m_1 \vee m_2 = f^{-1}(n_1) \vee f^{-1}(n_2) = f^{-1}(n_2) = m_2$$

$$\Rightarrow \quad m_1 \le m_2 \Rightarrow f^{-1}(n_1) \le f^{-1}(n_2)$$

2- كفاية الشرط:

- لنفرض ان f ايزومورفيزم ترتيبي للمجموعة $(M,\le)$ في المجموعة $(N,\le)$ ولنثبت ان $f(x\vee y) = f(x) \vee f(y)$
- بما ان $x \le x \vee y$, $y \le x \vee y$

وبما ان f ترتيبي اذاً $f(x) \le f(x\vee y)$, $f(y) \le f(x\vee y)$

حداً علوياً للمجموعة $f(y), f(x)$

$$f(x) \vee f(y) \le f(x \vee y) \quad \dots (1)$$

وبما ان $f(y) \le f(x) \vee f(y)$, $f(x) \le f(x) \vee f(y)$

كذلك: لأن f^{-1} للمبيع

$x \le f^{-1}[f(x) \vee f(y)]$, $y \le f^{-1}[f(x) \vee f(y)]$

$\therefore x \vee y \le f^{-1}[f(x) \vee f(y)]$

$\Rightarrow f(x \vee y) \le f(x) \vee f(y)$ ....[2]

من [1] و [2] نجد أن

$f(x \vee y) = f(x) \vee f(y)$

- وبالطريقة مماثلة نبرهن أن

$f(x \wedge y) = f(x) \wedge f(y)$

تمرين: إذا كان $[a,b]$ في شبكة توزيعية $(E,\le,\vee,\wedge)$ برهن أن f المعرف بالشكل هو مورفيزم شبكي غامر.

$f: E \to [a,b]$

$f(x) \mapsto (x \vee a) \wedge b$

ع: نقول أنه مورفيزم شبكي ، صورة الفاصلة هو تقاطع الصور وصورة الاتحاد

غ: شبكة غامر من أعلى عنصر إذا اختار من المستقر يكون صورة للمجال

مبرهنة: إذا كان f ايزومورفيزم ترتيبي شبكي من الشبكة M حيث $0,1 \in M$ على الشبكة N عندئذٍ فإن $f(0)$ هو صفر الشبكة N ، $f(1)$ هو واحد الشبكة N. كما أن $(f(x))' = f(x')$ «متمم الصورة يساوي الى صورة المتمم»

البرهان:

ليكن y اختيارياً من الشبكة $(N,\le,\vee,\wedge)$ وبما أن f ايزومورفيزم يوجد عنصر $x \in M$ بحيث أن $f(x)=y$

وبما أن $x \in M$ و $0,1 \in M$ عندئذٍ:

فإن $0 \leq x \leq 1$ وبما أن f إيزومورفيزم شبكي ترتيبي فإن

$f(0) \leq f(x) \leq f(1)$

$f(0) \leq y \leq f(1)$

لنفرض أن x متمم x في M

$x \wedge x' = 0 \quad , \quad x \vee x' = 1$

$x \wedge x' = 0 \Rightarrow f(x) \wedge f(x') = f(0)$

$x \vee x' = 1 \Rightarrow f(x) \vee f(x') = f(1)$ } $\Rightarrow (f(x))' = f(x')$

نتيجة: إن الشبكات المنتهية والتي تكون مخططات هاس لها متشابه إيزومورفية مع بعضها البعض.

مثال:

$(P(E), \leq, \vee, \wedge)$ حيث $E = \{a, b, c\}$

مخطط هاس لها يشبه مخطط الشبكة $D(42)$ عندها فإن

$P(E) \cong D(42) \cong D(30) \cong D(70)$

توزيعية ومتممة

مثال (2): إذا كانت S هي شبكة توكليانية $(S, \leq, \vee, \wedge)$ عندها $\forall a \in S$ فإن الدالة $\theta : S \to [0, a] \times [a, 1]$ المعرف بالشكل

$\theta(x) = (x \wedge a, x \vee a)$

إيزومورفيزم شبكي ترتيبي